MATEMATICA - LEZIONE 12

venerdì 17 ottobre 2025 11:09

Funzioni:

- funzioni iniettive / suriettive / biettive.
- Composizione di funzioni
- Funzioni invertibili.
- Funzioni monotone
- Funzioni simmetriche (pari / dispari).

Funzioni limitate

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

1) Si dice che f è SUPERIORMENTE LIMITATA se $f(X)$ (immagine) è superiormente limitata. Cioè $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in X : f(x) \leq M$.

2) Si dice che f è INFERIORMENTE LIMITATA se $f(X)$ è inf. limitato. Cioè $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in X : f(x) \geq m$.

3) Si dice che f è LIMITATA se lo è sia superiormente che inferiormente. Cioè $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in X \; m \leq f(x) \leq M$.

OSS

f è limitata $\Longleftrightarrow$ $\exists\, M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ t.c. $\forall x \in X : |f(x)| \leq M$.

$(-M \leq f(x) \leq M)$

OSS Se $f: X \to Y$ è superiormente limitata allora il grafico di f giace sotto una retta orizzontale.

Analogamente, se f è inferiormente limitata, il grafico si trova sopra a una retta orizzontale.

Se f è limitata, il grafico è compreso tra due rette orizzontali.

Def: Sia $f: X \to Y$, $X, Y \in \mathbb{R}$. Definiamo ESTREMO SUPERIORE DI f IN X la quantità

$\sup_X f := \sup f(X)$. (vale $+\infty$ se f non è sup. lim. è un numero reale se f è sup. lim.)

ESTREMO INFERIORE:

$\inf_X f := \inf(X)$.

Se $\exists \max f(X)$, allora esso si dice anche MASSIMO (ASSOLUTO) DI f IN X e si indica con $\max_X f$

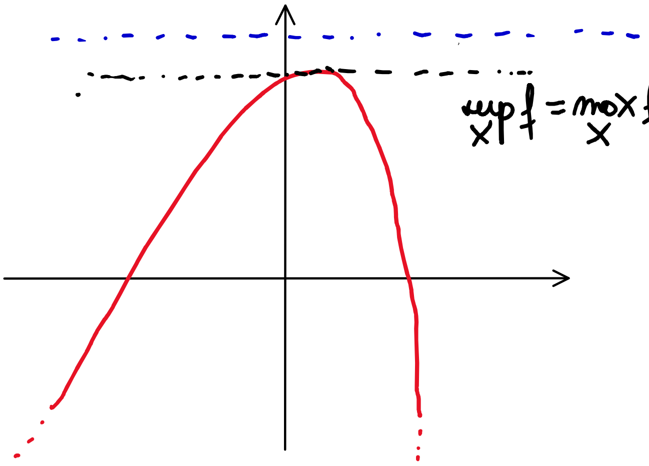
Se $\exists \min f(X)$, esso si dice anche MINIMO ASSOLUTO di f in X e si indica con $\min_X f$.

Simboli da ricordare

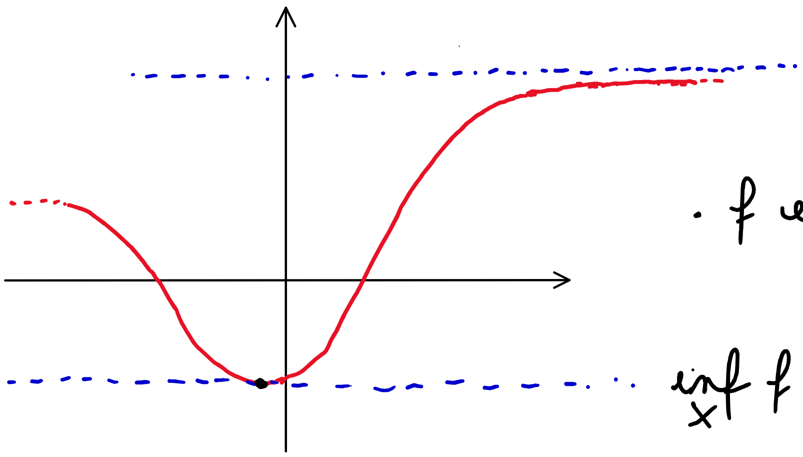
$$\sup_X f \;,\quad \inf_X f \;,\quad \max_X f \;\text{ e }\; \min_X f.$$

$$\left(\sup_{x\in X} f(x) \;,\quad \inf_{x \in X} f(x) \quad \max_{x\in X} f(x) \;\text{ e }\; \min_{x\in X} f(x) \right)$$

ESEMPI



$\sup_X f = \max_X f$ funzione superiormente limitata che ammette massimo



$\sup_X f$ e $\nexists \max_X f$

. f è limitata

$\inf_X f = \min_X f$

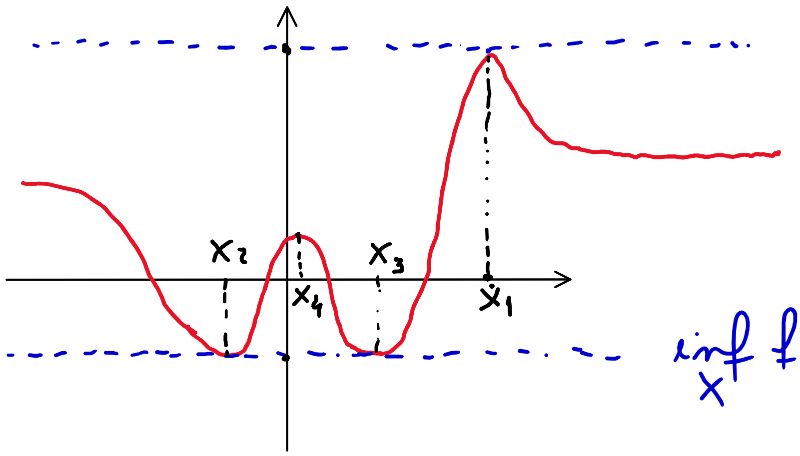
OSS

$$\exists \max_X f \iff \exists\, x_1 \in X \text{ t.c. } f(x_1) = \sup_X f = \max_X f$$

$$\exists \min_X f \iff \exists\, x_2 \in X \text{ t.c. } f(x_2) = \inf_X f = \min_X f$$

Def: I punti x_1 e x_2 si dicono PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO e PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

Nota x_1 e x_2 possono non essere unici:



$\sup_X f = \max_X f$

$\inf_X f = \min_X f$

- x_1 è un punto di max assoluto $f(x_1) = \max_X f$
- x_2 e x_3 sono punti di min assoluto.
- x_4 NON è un punto di max assoluto (vedremo che x_4 è un punto di "max locale").

Nota: Per le funzioni reali di variabile reale, spesso si indica solo l'espressione di $f(x)$, senza specificare dominio e codominio. I tal caso si intende che:

- Come dominio: Si prende il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui f è definita (si chiama DOMINIO NATURALE / CAMPO DI ESISTENZA e si indica con $\mathrm{Dom}(f)$)
- Come codominio si prende $\mathbb{R}$.

ESEMPI

$f(x) = c$ $\quad$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

Si intende $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $Dom(f) = [0, +\infty[$

Si intende $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{x}$.

Condizioni (principali) da imporre per trovare $Dom(f)$.

- Denominatori $\neq 0$.
- Argomento delle radici di indice pari deve essere ≥ 0.
- Argomento dei logaritmi > 0.

ESEMPI

1) $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$

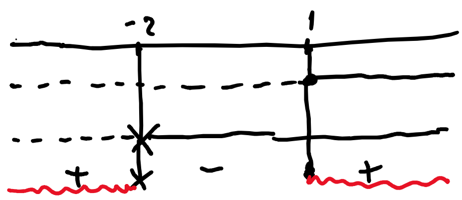
c.e. : $3x - 1 \neq 0$, $x \neq \frac{1}{3}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

$x + 2 \neq 0$, $x \neq -2$

$\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$



$x < -2 \quad \vee \quad x \geq 1$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left]-\infty, -2\right[\ \cup \ \left[1, +\infty\right[$$

3) $$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{e^x - 2}$$

$$e^x - 2 \neq 0 \ \longrightarrow \ e^x \neq 2 \ \longrightarrow \ x \neq \ln 2$$

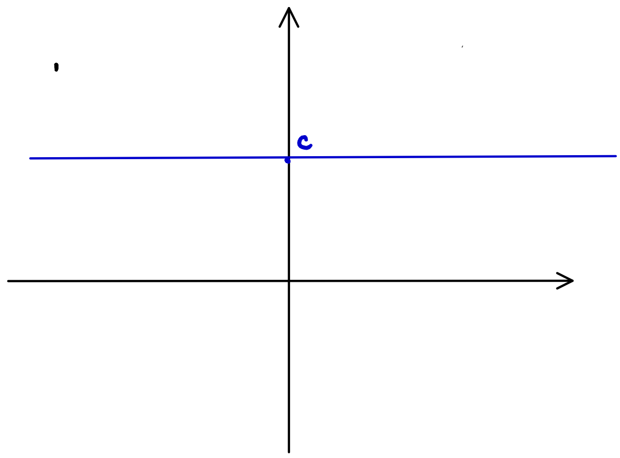
$$x \geq 0$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left[0, +\infty\right[\setminus \{\ln 2\}$$
$$= \left[0, \ln 2\right[\ \cup \ \left]\ln 2, +\infty\right[.$$

Funzioni elementari

1) FUNZIONI COSTANTI

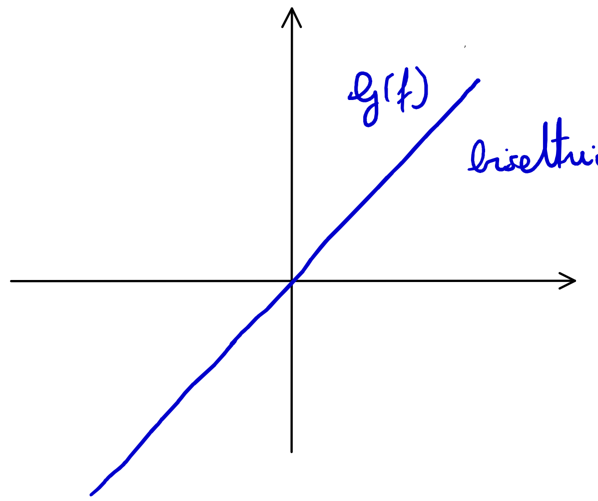
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto c \qquad f(x) = c \in \mathbb{R}$$



$$f(\mathbb{R}) = \{c\}$$

2) Funzione identità di $\mathbb{R}$

$$f(x) = x \qquad \left(\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x \right)$$



bisettrice di I e III quadrante

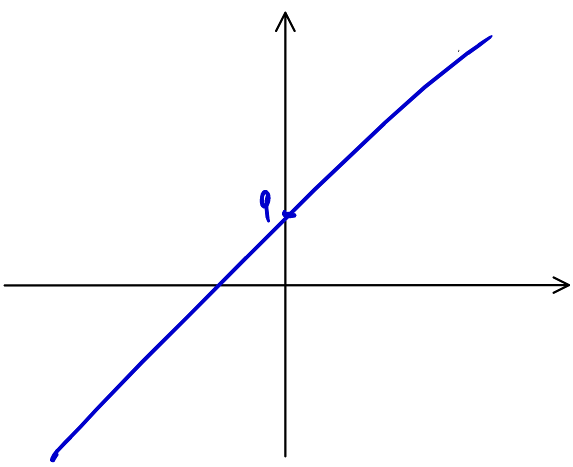
3) Funzioni affini

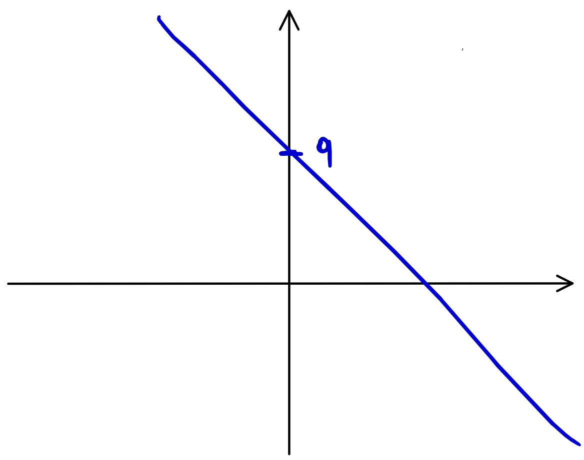
$f(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$

m è detto COEFFICIENTE ANGOLARE

q è detto TERMINE NOTO / INTERCETTA

- $m = 0$, funzione costante ($f(x) = q$)
- $m = 1$, $q = 0$: funzioni identità
- $m > 0$ retta crescente
- $m < 0$ retta decrescente

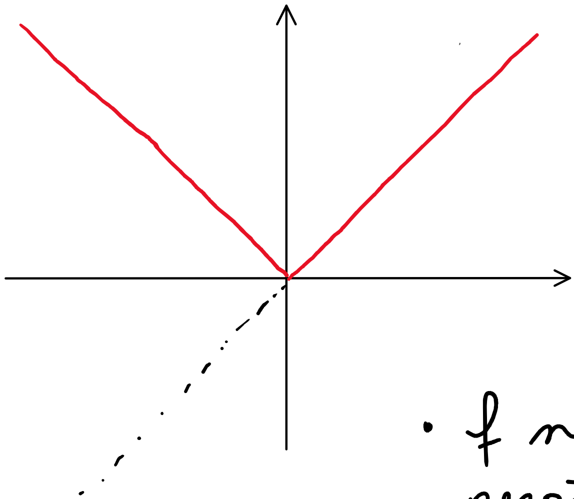




- $m \neq 0$ f è strettamente monotone.
- $m \neq 0$: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

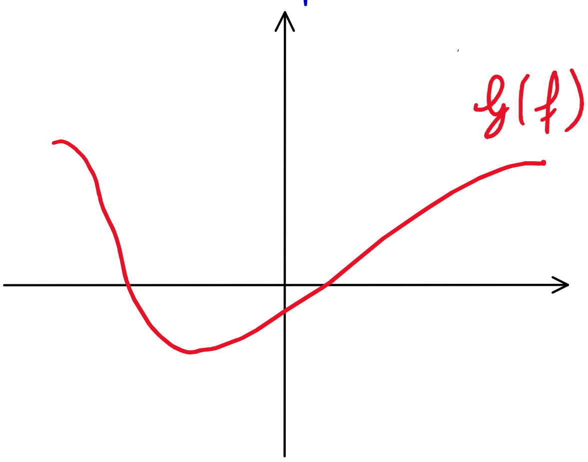
4) Valore assoluto

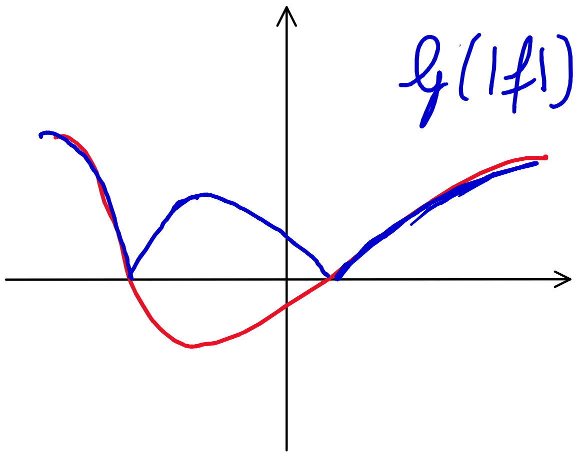
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$
- f è pari
  $|-x| = |x|$
- f non è monotona in $\mathbb{R}$ però è strettamente monotona crescente in $[0, +\infty[$ e decrescente in $]-\infty, 0]$

In generale: per disegnare $|f(x)|$:
Basta ribaltare le parti del grafico di f in cui $f < 0$

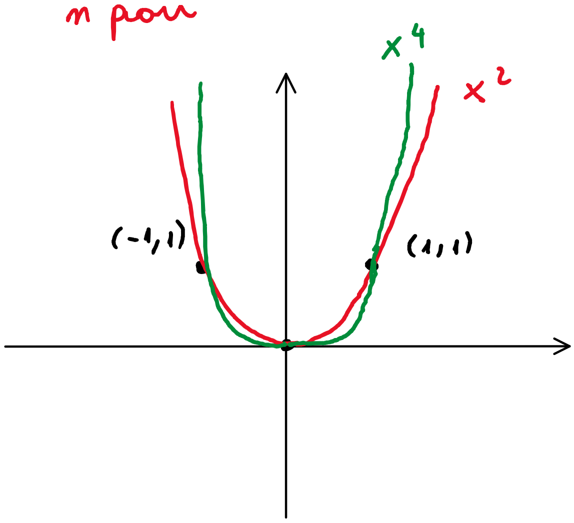




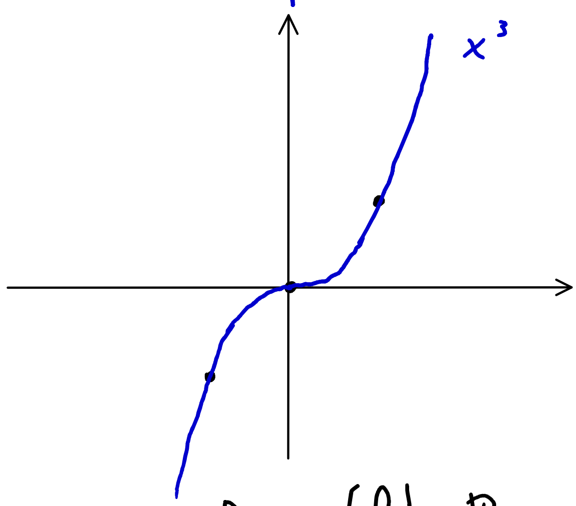
5) Potenze con esponente naturale

$$f(x) = x^n \quad \text{con } n \geq 2 \text{ , } n \in \mathbb{N}$$

n pari:



n dispari:



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- f è pari
- $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$
- f non è iniettiva
- $f|_{[0,+\infty[} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ allora $f|_{[0,+\infty[}$ è strett. monotona, è invertibile e la sua inversa è la funzione radice n-esima.

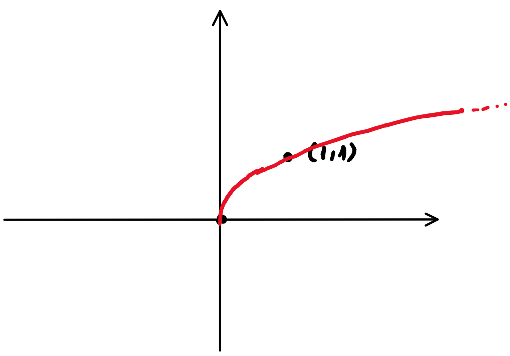
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- f è dispari
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- f è strettamente monotona crescente
- f è invertibile e la sua inversa è la funzione radice n-esima.

6) Radice n-esima

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 2.$$

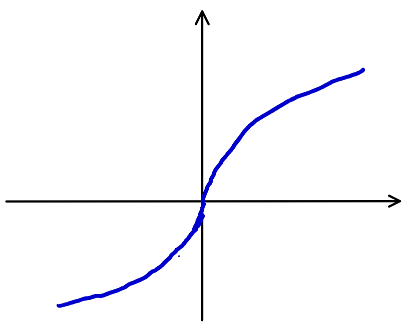
n pari

$Dom(f) = [0, +\infty[$



n dispari

$Dom(f) = \mathbb{R}$

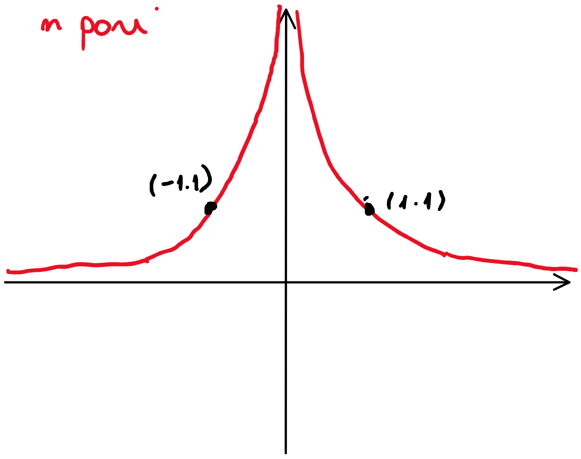


7) POTENZE CON ESPONENTE INTERO NEGATIVO

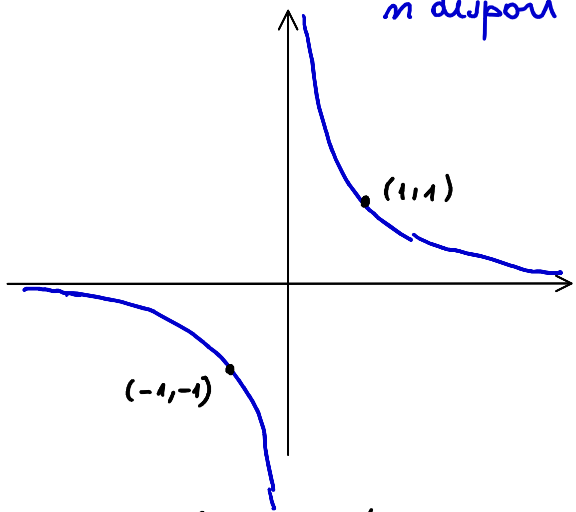
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

n pari



n dispari



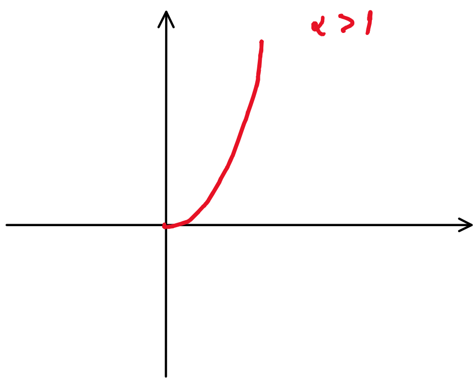
- f è pari
- $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) =]0, +\infty[$
- f non è monotona

- f è dispari
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- f non è monotona

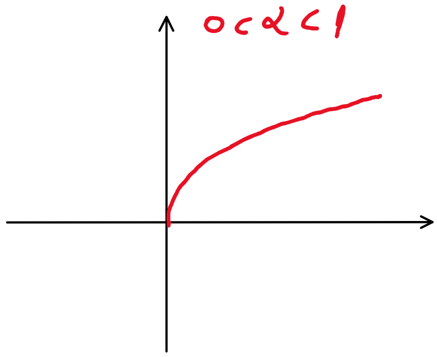
8) Potenze con esponente reale.

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

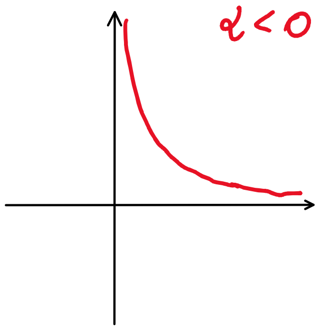
$\alpha > 1$



$0 < \alpha < 1$



$\alpha < 0$



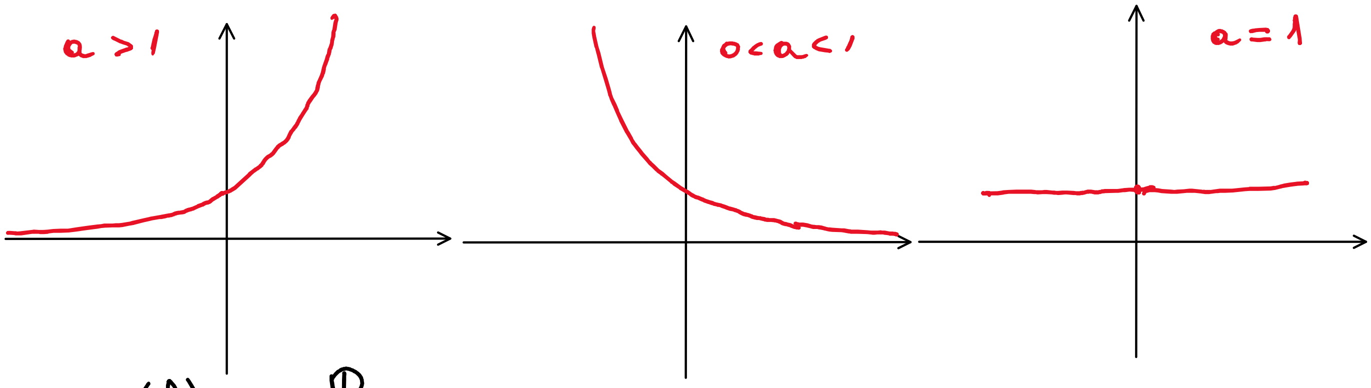
- $Dom(f) = [0, +\infty)$

$Dom(f) = [0, +\infty[$

$Dom(f) =]0, +\infty[$

9) ESPONENZIALI

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$



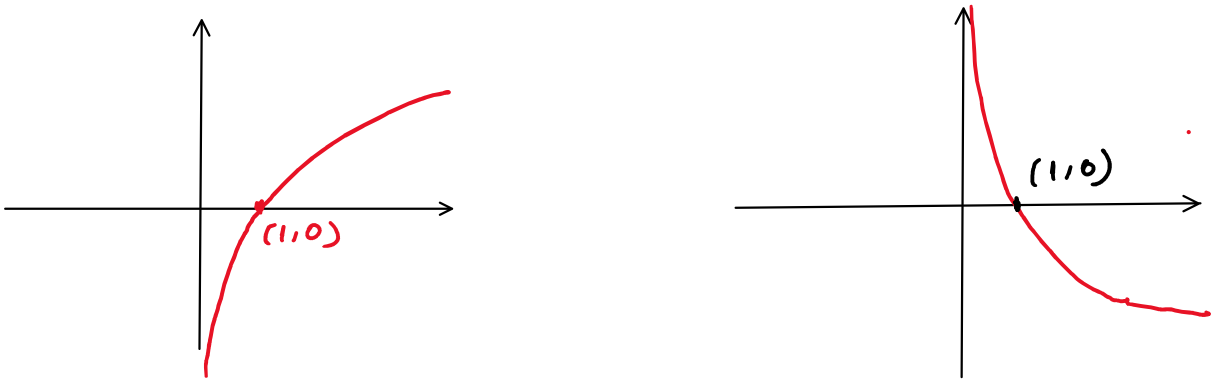
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- Se $a \neq 1$: $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$
- Se $a > 1$ f è strettamente crescente
- Se $0 < a < 1$ f è strettamente decrescente.
- Se $a \neq 1$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ è invertibile e la sua funzione inversa è la funzione logaritmo

10) Funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

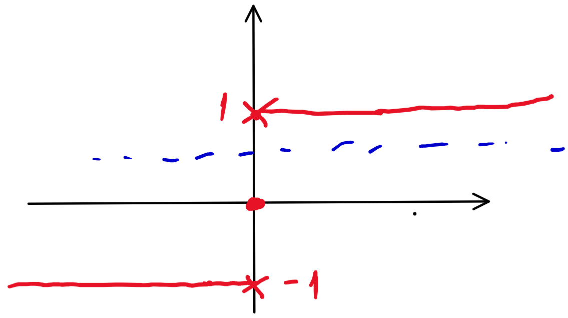
$$Dom(f) =]0, +\infty[\quad , \quad f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$$

- $a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$



La funzione segno

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$

$f(x)$ spesso si indica con $\mathrm{sgn}(x)$

OSS

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x = \mathrm{sgn}(x) \cdot |x|$